RÉPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAURÉAT

Correction de l'épreuve du bac de Mathématiques 2007

EXERCICE 1

1) Détermination de l'expression analytique de g

L'expression analytique d'une application affine est :

$$\begin{cases} x' = ax + bx + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

$$g(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} -1 = a + b + c & (1) \\ -1 = a' + b' + c' & (2) \end{cases}$$

$$g(B) = B' \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2a + b + c & (3) \\ 0 = 2a' + b' + c' & (4) \end{cases}$$

$$g(O) = O' \Rightarrow \begin{cases} 2 = c & (5) \\ 0 = c' & (6) \end{cases}$$

De l'équation (4), on a $2a' + b4 = 0 \Rightarrow b' = -2a'$

d'où en (2), on a : $-1 + a' + 2a'$

$$\boxed{a' = 1}$$

d'où

$$\boxed{b' = -2}$$

De l'équation (1), on a :

$-1 = a + b + 2$

$b = -3 - a$

d'où en (3), on a :

$1 = 2a - 3 - a + 2$

$$\boxed{a = 2}$$

d'où

$$\boxed{b = -5}$$

donc

$$g : \begin{cases} x' = 2x - 5y + 2 \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

2) Démonstration que g est une application bijective

Soit $a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $b\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ tel que $g(a) = g(b)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5y_1 + 2 = 2x_2 - 5y_2 + 2 & (1) \\ x_1 - 2y_1 = x_2 - 2y_2 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) entraine $x_1 - x_2 = 2y_1 - 2y_2$
d'où en (1), on a :
$2(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$, or $x_1 - x_2 = 2y_1 - 2y_2$
$2(2y_1 - 2y_2) = 5y_1 - y_2$

$$y_1 = y_2$$

donc en (2) on a :
$x_1 - x_2 = 0$

$$x_1 = x_2$$

donc l'application g est injective
Soit $b \in \mathscr{P}$ et $b\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 2x - 5y + 2 & (3) \\ y_1 = x - 2y & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) donne $x = y_1 + 2y$ et en (1) on a :
$x_1 = 2(y_1 + 2y) - 5y + 2$
$x_1 = 2y_1 - y + 2$
$y = 2y_1 + 2 - x_1$
ce qui donne $\begin{cases} x = 2y_1 + 2 - x_1 \\ y = 3y_1 - x_1 + 2 \end{cases}$
d'où $\exists z \in \mathscr{P}$ tel que $g(z) = b$,
donc g est surjective, d'où g est une application bijective.

2) Soit h l'application affine de (P) vers (P) d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -2x + 5y + 4 \\ y' = -x + 2y + 2 \end{cases}$$

Expression de h(A'), h(B') et h(O').

$$h(A') : \begin{cases} x' = -2(-1) + 5(-1) + 4 \\ y' = -(-1) + 2(-1) + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases}$$

donc

$$h(A') = A$$

$$h(B') : \begin{cases} x' = -2(1) + 5(0) + 4 \\ y' = -(1) + 2(0) + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases}$$

donc

$$h(B') = B$$

$$h(0') : \begin{cases} x' = -2(2) + 5(0) + 4 \\ y' = -(2) + 2(0) + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

donc

$$h(O') = O$$

Déduisons en que $h = g^{-1}$ où g^{-1} désigne la bijection réciproque de g

$$goh : \begin{cases} x' = 2(-2x + 5y + 4) - 5(-x + 2y + 2) + 2 \\ y' = -2x + 5y + 4 - 2(-x + 2y + 2) \end{cases}$$

$x' = -4x + 10y + 8 + 5x - 10y - 10 + 2$

$$\boxed{x' = x}$$

$y' = -2x + 5y + 4 + 2x - 4y - 4$

$$\boxed{y' = y}$$

donc

$$goh = Id$$

Or g est bijective donc

$$h = g^{-1}$$

4) (D) est une droite du plan d'équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma$ sont des nombres réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0,0))$.

$$(D) : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

a) Détermination en fonction de α, β et γ une équation (D') image de (D) par g

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D),
donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$
On sait que $\vec{u}$ est un vecteur de (D')

$g(-\vec{u}) : \begin{pmatrix} a' = 2(-\beta) - 5\alpha + 2 \\ b' = -\beta - 2\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2\beta - 5\alpha + 2 \\ -\beta - 2\alpha \end{pmatrix}$

Pour $\beta \neq 0, \quad x = 0, \quad y = \frac{-\gamma}{\beta}$
d'où le point $c\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\gamma}{\beta} \end{pmatrix} \in (D)$

$g(c) : \begin{cases} x' = \frac{\gamma}{\beta} + 2 \\ y' = \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}$

d'où $\qquad c'\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\beta} + 2 \\ \frac{\gamma}{\beta} \end{pmatrix} \in (D')$

d'où la droite (D') a pour équation :

$$(-\beta - 2\alpha)x + (2\beta + 5\alpha + 2)y + \epsilon = 0$$

$c' \in (D')$ on a :
$\epsilon = -(-\beta - 2\alpha)(\frac{\gamma}{\beta} + 2) - (2\beta + 5\alpha + 2)(2\frac{\gamma}{\beta})$
$= +\gamma + \frac{2\alpha\gamma}{\beta} + 2\beta + 4\alpha - 4\gamma - 10\frac{\alpha\gamma}{\beta} - 4\frac{\gamma}{\beta}$
$= +\gamma - 8\frac{\alpha\gamma}{\beta} + 2\beta + 4\alpha - 4\gamma - 4\frac{\gamma}{\beta}$
$= -3\gamma - 8\frac{\alpha\gamma}{\beta} + 2\beta + 4\alpha - 4\frac{\gamma}{\beta}$
$= (-3 - \frac{8\alpha}{\beta} - \frac{4}{\beta})\gamma + 2\beta + 4\alpha$

$(D') : (-\beta - 2\alpha)x + (2\beta + 5\alpha + 2)y + (-3 - \frac{8\alpha}{\beta} - \frac{4}{\beta})\gamma + 2\beta + 4\alpha$

$b)$ Vérification que (D) et (D') ne sont pas parallèles

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ n'étant pas colinéaires d'où (D) et (D') ne sont pas parallèles.

5) Pour tout point M du plan, on pose : $M_1 = g(M); M_2 = g(M_1)$ et $M_3 = g(M_2)$

$a)$ Déduisons du 3)$a)$ que si les points M, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux alors ils ne sont pas alignés.

Soit (Δ) la droite passant par M_1 et M_2.
Soit (Δ') l'image de la droite (Δ) par g
(Δ) passant par M et M_2 d'où (Δ') passera par $g(M)$ et $g(M_1)$

Or $\begin{cases} g(M) = M_1 \\ g(M_1) = M_2 \end{cases}$

Par ailleurs (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles donc M, M_1 et M_2 ne sont pas alignés

$b)$ Démontrons que l'écriture complexe de gog est donnée par : $z' = -z+6+2i$.

$$gog : \begin{cases} x' = 2(2x - 5y + 2) - 5(x - 2y) + 2 \\ y' = (2x - 5y + 2) - 2(x - 2y) \end{cases}$$

$x' = 4x - 5x - 10y + 10y + 4 + 2$
$x' = 6 - x$
$y' = -y + 2$
$x' + iy' = 6 - x - iy + 2i$
$x' + iy' = -(x + iy) + 6 + 2i$

$$\boxed{z' = -z + 6 + 2i}$$

$c)$ Détermination de l'ensemble des points invariants par gog
$z' = -z + 6 + 2i$
$z = -z + 6 + 2i$
$2z = 6 + 2i$
$z = 3 + i$
C'est le point E d'affixe

$$\boxed{z = 3 + i}$$

d) Vérification que gog est la symétrie de centre $I\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$z' = -z + 6 + 2i$
$z' = -z + 2(3 + i)$
L'expression générale d'une symétrie centrale est
$z' = -z + iz$
d'où gog est une symétrie centrale de centre $I\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
$gogogog : z' = -(-z + 6 + 2i) + 6 + 2i$
$z' = z$
d'où

$$\boxed{gogogog = Id}$$

6)
a) En remarquant que pour tout point M du plan :
$M_2 = (gog)(M)$ et
$M_3 = (gog)(M_1)$;
démontrer que I est isobarycentre de M, M_1, M_2 et M_3.
$M_2 = (gog)(M) \Rightarrow \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{MI}$
$M_3 = (gog)(M_1) \Rightarrow \overrightarrow{IM_3} = \overrightarrow{M_1I}$
$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} + \overrightarrow{IM_3} = -\overrightarrow{IM_2} + \overrightarrow{IM_3} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_3}$
$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} + \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$
d'où I est isobarycentre des M, M_1, M_2 et M_3.

b) Démontrons que $\overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{g(I)M_1} + \overrightarrow{g(I)M_2} + \overrightarrow{g(I)M_3} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$
$g(\overrightarrow{IM}) + g(\overrightarrow{IM_1}) + g(\overrightarrow{IM_2}) + g(\overrightarrow{IM_3}) = \vec{0}$
$\overrightarrow{g(I)g(M)} + \overrightarrow{g(I)g(M_1)} + \overrightarrow{g(I)g(M_2)} + \overrightarrow{g(I)g(M_3)} = \vec{0}$
$\overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{g(I)M_1} + \overrightarrow{g(I)M_2} + \overrightarrow{g(I)M_3} = \vec{0}$
$g(\vec{M_3}) = gog(\vec{M_2})$
$g(\vec{M_3}) = gogogog(M)$
$g(\vec{M_3}) = M$
d'où

$$\overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{g(I)M_1} + \overrightarrow{g(I)M_2} + \overrightarrow{g(I)M_3} = \vec{0}$$

$c)$ Démontrons que $g(I) = I$

$\overrightarrow{g(I)I} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{g(I)I} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{g(I)I} + \overrightarrow{IM_2} + \overrightarrow{g(I)I} + \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$
$4\overrightarrow{g(I)I} = \vec{0}$
$\overrightarrow{g(I)I} = \vec{0}$
$I = g(I)$

$d)$ Démontrons que I est l'unique point invariant par g

Soit I et $F \in \mathscr{P}$ distincts tels que
$g(I) = I$
$g(F) = F$
Soit la droite (IF) et la droite $(g(I)g(F))$
$g(I)$ étant l'image de I et $g(F)$ étant l'image de F donc (IF) et $(g(I)g(F))$ ne sont pas parallèles
Or $\begin{cases} g(I) = I \\ g(F) = F \end{cases}$ donc l'absurdité.
Or $g(I) = I$ donc $g(F) \neq F$
d'où

$$I = F$$

EXERCICE 2

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f une application définie du plan (P) dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe le point
$M(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

1)
$a)$ Déterminons l'écriture complexe de f
$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$
$x' + iy' = y + ix + 4 - 2i$
$x' + iy' = i(x - iy) + 4 - 2i$
$z' = i\bar{z} + 4 - 2i$

b) C'est un antidéplacement

c) L'ensemble des points invariants par f

$z' = z$
$z = i\bar{z} + 2$
$x + iy = y + ix + 2$
$\begin{cases} x = y + 2 \\ x = y \end{cases}$
L'ensemble des points invariants est l'ensemble vide.

d) C'est une symétrie glissée

2) Déterminons l'expression analytique de fof

$fof = i\bar{z} + 2 + 2i$
$\begin{cases} x" = y' + 4 \\ y" = x' - 2 \end{cases}$
$\begin{cases} x" = x - 2 + 4 \\ y" = y + 4 - 2 \end{cases}$
$\begin{cases} x" = x + 2 \\ y" = y + 2 \end{cases}$
C'est une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) On admet que $f = sot = tos$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{w}$ et t la translation de vecteur $\vec{w}$.

a) Démontrons que $fof = tot$
$f = sot$
$fof = tosotos$
$fof = tososot$
$fof = tos^2ot$
$fof = tot$

b) Détermination des coordonnées de K milieu de $[OO']$ oùO est l'image de

O par f

O' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc, K a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{4+2}{2} \\ \frac{-2+0}{2} \end{pmatrix}$

et donc $K \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c)$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2i \end{pmatrix}$

(Δ) est la première bissectrice.

4) On considère maintenant l'ensemble (E) défini par son équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = 4\cos^2\theta - 2 \\ y(\theta) = 3\sin 2\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

$a)$ Déterminons une équation cartésienne de (E)

$\begin{cases} x(\theta) = 2\cos 2\theta \\ y(\theta) = 3\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{x^2(\theta)}{4} + \frac{y^2(\theta)}{9} = 1$$

C'est une ellipse de centre O et de sommets $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A' \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B' \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b)$ Une équation cartésienne de l'image de (E) par f

$\begin{cases} x'(\theta) = 3\sin\theta + 4 \\ y'(\theta) = 4\cos^2\theta - 2 - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x'(\theta) = 3\sin\theta + 4 \\ y'(\theta) = 2\cos 2\theta - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x'(\theta)-4}{3} = \sin\theta \\ \frac{y'(\theta)+2}{2} = \cos\theta \end{cases}$

$$\frac{(x'(\theta)-4)^2}{9} + \frac{(y'(\theta)+2)^2}{4} = 1$$

$c)$

C'est une ellipse de centre $\Omega\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, de grand axe (ox), de petit axe (oy) et de sommets $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

PROBLÈME

PARTIE A

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[\frac{2\pi}{2}, 2\pi]$, on considère la suite géométrique $(U_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ de premier terme $U_0 = \cos a$ et de raison $\sin a$.

1)
$a)$ Déterminons les valeurs de a pour lesquelles (U_n) est constante à partir d'un certain rang
$U_n = \cos a \sin^n a, \qquad \forall a \in [\frac{2\pi}{2}, 2\pi]$
Pour n suffisamment grand,

$$\sin^n a \longrightarrow 0$$

$b)$ Étude de la convergence de la suite $(U_n)_{(n\in\mathbb{N})}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \cos a \sin^n a$
Or $\lim_{n\to+\infty} \sin^n a = 0$
d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
donc U_n est une suite convergente.

2) $(S_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est la suite de terme général :

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$$

$a)$ Expression de S_n en fonction de n et de a

$$S_n = \cos a \tfrac{1-\sin^n a}{1-\sin a}$$

$b)$ Limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

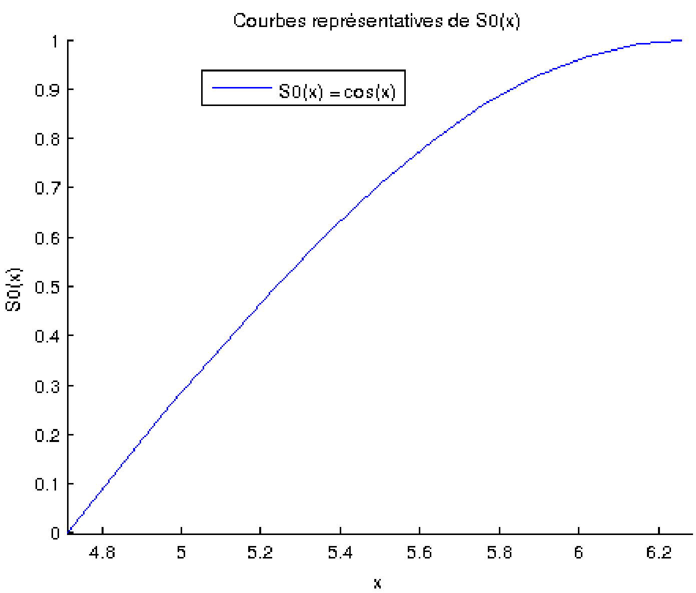
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \tfrac{\cos a}{1-\sin a}$$

PARTIE B

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
$\Omega(\frac{3\pi}{2}, 0)$ désigne un point de (P).

1) Soit S_0 la fonction définie sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ par : $S_0(x) = \cos x$.
Dressons le tableau de variations complet de S_0, puis construisons (C_0) la courbe représentative de la fonction S_0 dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
S_0 étant dérivable,
$S_0' = -\sin x, \qquad \forall x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
$\sin x < 0$, donc $S_0'(x) > 0$, et donc S_0 est croissante.

x	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$S_0'(x)$	+	
$S_0(x)$	0 ↗	1



2) Soit S_1 la fonction définie sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ par : $S_1(x) = \cos x + \cos x \sin x$

a) Etude de la dérivabilité de S_1

S_1 est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

$S_1'(x) = -\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

$$S_1'(x) = -\sin x + \cos 2x$$

b) Vérifions que pour tout élément de $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, $S_1(x) = (\sin x + 1)(1 - 2\sin x)$.

$S_1'(x) = -\sin x + \cos 2x$

$S_1'(x) = -\sin x - 2\sin^2 x + \cos^2 x$

$(\sin x + 1)(1 - 2\sin x) = \sin x - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin x$

$(\sin x + 1)(1 - 2\sin x) = -\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

$(\sin x + 1)(1 - 2\sin x) = -\sin x + \cos 2x$

$(\sin x + 1)(1 - 2\sin x) = S_1'(x)$

c) Étude du sens de variation de S_1

$\sin x \geqslant -1$

$\sin x + 1 \geqslant 0$

$-\sin x \geqslant 0$

Or $1 - 2\sin x \geqslant 0$

donc, $S_1'(x) = (\sin x + 1)(1 - 2\sin x) \geqslant 0$ et donc S_1 est croissante.

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$S_1'(x)$		$+$	
$S_1(x)$	0	$\nearrow$	1

3) Soit S la fonction définie sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, $\quad S(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

a) Etude de la dérivabilité de S, puis calcul de $S'(x)$

S est dérivable comme produit de fonctions dérivables

$x \longrightarrow \cos x$

$x \longrightarrow \frac{1}{1-\sin x}$

$S'(x) = \frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$S'(x) = \frac{\sin^2 x-\sin x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$S'(x) = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$

b)

$S'(x) = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$

donc, $\sin x \neq 1$,

$$S'(x) = \frac{1}{1-\sin x} \qquad x \in [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi]$$

c) Etude du sens de variation de S, puis tableau complet de variation
$-\sin x \geqslant 0$
$1 - \sin x > 0$
$\frac{1}{1-\sin x} > 0$
donc, $S'(x) \geqslant 0$ et donc S est croissante.

x	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$S'(x)$	$+$	
$S(x)$	$0 \nearrow$	1

4)
a) Démontrons pour $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ les inégalités : $S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x)$
$1 - \sin x \geqslant 1$
d'où $\frac{1}{1-\sin x} \leqslant 1$
$x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ donc,

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} \leqslant 1$$
$$S(x) \leqslant S_0(x)$$

$S(x) - S_1(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} - \cos x(1 + \sin x)$
$S(x) - S_1(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}[1 - 1 + \sin^2 x]$
$S(x) - S_1(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}[\sin^2 x]$

Or $\begin{cases} \sin^2 x > 0 \\ \cos x > 0 \\ 1 - \sin x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\cos x}{1-\sin x}[\sin^2 x]$

donc,

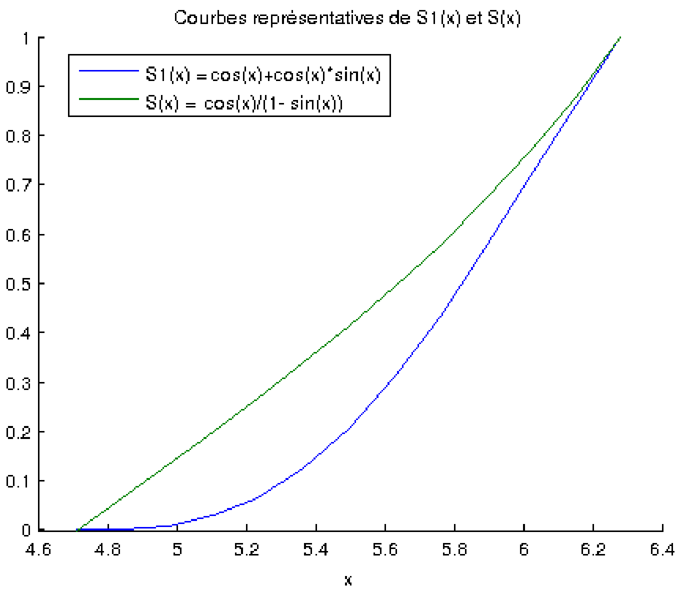
$$S(x) - S_1(x) \leqslant 0$$

et donc,

$$S(x) \leqslant S_1(x)$$

d'où

$$S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x)$$



PARTIE C

1)

a) Calcul de $S(\frac{3\pi}{2})$ et $S'(\frac{3\pi}{2})$

$S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2})}{1-\sin(\frac{3\pi}{2})}$

Or $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$
donc

$$S(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

On sait que d'après $B)3)b)$

$$\forall x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi], \quad S'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$$

$S'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{1-\sin\frac{3\pi}{2}}$
donc

$$S'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

b) Montrons que S est une bijection de $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ sur un intervalle J

S étant continue et strictement croissante sur$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, d'où S réalise une bijection de $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ dans $S([\frac{3\pi}{2}, 2\pi])$.
Or d'après 1)a), $\quad S(\frac{3\pi}{2}) = 0$ et $S(2\pi) = 1$
donc

$$J = S([\frac{3\pi}{2}, 2\pi]) = [0; 1]$$

2) Étude de la dérivabilité de S^{-1} la bijection réciproque de S ; puis détermination de $(S^{-1})'(0)$.

S étant dérivable et

$$\forall x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi], \quad S'(x) \neq 0,$$

donc S^{-1} est dérivable, donc

$$S'^{-1}(x) = \frac{1}{S'(S^{-1}(x))}$$

et donc

$$S'^{-1}(0) = \frac{1}{S'(S^{-1}(0))}$$

or $S^{-1}(0) = \frac{3\pi}{2}$
$S'^{-1}(0) = \frac{1}{S'(\frac{3\pi}{2})}$
$S'^{-1}(0) = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
d'où

$$S'^{-1}(0) = 2$$

PARTIE D

Pour tout nombre naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ par

$$S_n(x) = \cos x(1 + \sin x + ... + \sin^n x)$$

On pose $I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)dx$

1)
a) Justification de l'existence de I_n
S_n étant continue sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ d'où S_n admet un primitive sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
d'où I_n existe